Matematika 1 - Prvi kolokvijum

06.12.2003.

Rešenja zadataka - Grupa 1.

1. [5] **Izračunati** $\lim\limits_{n\to+\infty} log\sqrt[n]{\sin 1\cdot \sin\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{1}{n}}$.

$$\lim_{n\to+\infty} log\sqrt[n]{\sin 1\cdot \sin\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{log\sin 1 + log\sin\frac{1}{2}+\ldots+log\sin\frac{1}{n}}{n}$$

Direktnom primenom Štolcove teoreme $\left(\begin{array}{ll} 1) & \text{niz } y_n = n \text{ je monotono rastući niz} \\ 2) & \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty \\ 3) & \lim\limits_{n\to\infty} = \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{logsin\frac{1}{n+1}}{1} = -\infty \end{array}\right)$

dobijamo da je traženi limes $-\infty$.

2. [5] **Ispitati ograničenost i monotonost niza čiji je opšti član** $a_n = \dfrac{3}{3+1}+\dfrac{3}{3^2+2}+\ldots+\dfrac{3}{3^n+n}$.

Kako je $a_{n+1}-a_n = \dfrac{3}{3^{n+1}+n+1} > 0$ niz je monotono rastući.

Takodje, za svako n važi: $0 < a_n < 3(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}) = 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}} < \frac{1}{1-\frac{1}{3}} < \frac{3}{2}$ pa je niz ograničen.

3. [5] **Izračunati** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[5]{1+5x}-2}{\sqrt[6]{1+6x}-1}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[5]{1+5x}-2}{\sqrt[6]{1+6x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{3x}3x+\frac{\sqrt[5]{1+5x}-1}{5x}5x}{\frac{\sqrt[6]{1+6x}-1}{6x}6x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

.

4. [5] **Izračunati** $\lim\limits_{x\to+\infty} arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} arccos(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x\to+\infty} arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}) = \lim_{x\to+\infty} arccos(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}) = arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

5. [5] **Odrediti realne brojeve a i b tako da funkcija** $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$ **bude diferencijabilna u tački $x = 1$.**

Kako je

$$f'_{-}(1) = \lim_{h\to 0-} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0-}(2+h) = 2 \quad \text{i} \quad f'_{+}(1) = \lim_{h\to 0+} \frac{a(1+h)+b-1}{h} = \lim_{h\to 0+}(a + \frac{a+b-1}{h})$$

mora biti $a = 2$ i $a + b - 1 = 0$ tj. $a = 2,\ b = -1$.

6. [5] **Odrediti parametar n tako da prava $y = x + n$ bude tangenta krive $y = \dfrac{x}{x+4}$.**

Iz jednačine date prave i jednačine tangente $y - y_0 = \frac{4}{(x_0+4)^2}(x - x_0)$ date krive u tački (x_0, y_0) zaključujemo da je $f'(x_0) = 1$ i $\frac{4}{(x_0+4)^2} = 1$.

Iz poslednje jednakosti dobijamo $x_0 = -6$ ili $x_0 = -2$.
Za $x_0 = -6$ imamo $y_0 = 3$ i $n = 9$.
Za $x_0 = -2$ imamo $y_0 = -1$ i $n = 1$.

7. [10] **Odrediti oblast definisanosti funkcije $f(x) = \sqrt{-arcsin(log_{\frac{1}{2}}|x|)}$.**

$$\begin{aligned} & x \neq 0 \quad \wedge \quad |log_{\frac{1}{2}}|x|| \leq 1 \quad \wedge \quad arcsin(log_{\frac{1}{2}}|x|) \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x \neq 0 \quad \wedge \quad \underbrace{-1 \leq log_{\frac{1}{2}}|x| \leq 1 \quad \wedge \quad log_{\frac{1}{2}}|x| \leq 0} \\ \Leftrightarrow \quad & x \neq 0 \quad \wedge \quad -1 \leq log_{\frac{1}{2}}|x| \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x \neq 0 \quad \wedge \quad log_{\frac{1}{2}}2 \leq log_{\frac{1}{2}}|x| \leq log_{\frac{1}{2}}1 \\ \Leftrightarrow \quad & x \neq 0 \quad \wedge \quad 1 \leq |x| \leq 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x \in [-2,-1] \cap [1,2] \end{aligned}$$

.

8. [10] **Odrediti asimptote funkcije $f(x) = xln\dfrac{2x}{x+1}$.**

$Dom(f) = \{x | x \in R \wedge \frac{2x}{x+1} > 0\} = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

Kako je $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} xln\dfrac{2x}{x+1} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{ln\frac{2x}{x+1}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{(teorema Lopitala)}}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$ funkcija nema vertikalnu asimptotu s desna u tački $x = 0$.

Pošto je $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} xln\dfrac{2x}{x+1} = -\infty$ prava $x = -1$ je vertikalna asimtota.

Kako je $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, funkcija nema horizontalnu asimptotu.

Iz jednakosti

$$a = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} ln\frac{2x}{x+1} = ln2$$

.

$$b = \lim_{x \to \overset{+}{-}\infty} f(x) - xln2 = \lim_{x \to \overset{+}{-}\infty} x \ln \frac{2x}{2(x+1)} = \lim_{x \to \overset{+}{-}\infty} \frac{\ln \frac{2x}{2(x+1)}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{(teorema Lopitala)}}{=} \lim_{x \to \overset{+}{-}\infty} \frac{\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}} = -1$$

.

nalazimo da je prava $y = xln2 - 1$ je obostrana kosa asimptota funkcije.

9. [10] **Odrediti intervale monotonosti, lokalne ekstremne vrednosti, konveksnost, konkavnost i prevojne tačke funkcije** $f(x) = \dfrac{|x-1|}{(x+1)^3}$**.**

$\mathcal{D}om(f) = R\backslash\{-1\}$.

Kako je $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{(x+1)^3}, & x \leq 1 \\ \\ \frac{1-x}{(x+1)^3}, & x > 1 \end{cases}$ imamo $f'(x) = \begin{cases} \frac{2(2-x)}{(x+1)^4}, & x > 1 \\ \\ \frac{2(x-2)}{(x+1)^4}, & x < 1 \end{cases}$

$\big(f'(1)$ ne postoji, jer je $f'_+(1) = \lim\limits_{x \Rightarrow 1+0} f'(x) = \lim\limits_{x \Rightarrow 1+0} \dfrac{2(2-x)}{(x+1)^4} = \dfrac{1}{8}$, dok je $f'_-(1) = \lim\limits_{x \Rightarrow 1-0} f'(x) = \lim\limits_{x \Rightarrow 1+0} \dfrac{2(x-2)}{(x+1)^4} = -\dfrac{1}{8}$.)

$f'(x) < 0$ za $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$. Tada $f(x)$ monotono opada.

$f'(x) \geq 0$ za $x \in (1, 2]$. Tada $f(x)$ monotono raste.

Zbog toga je tacka $(1, f(1))$ tačka lokalnog minimuma funkcije, a tačka $(2, f(2))$ je tačka lokalnog maksimuma.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{6(x-3)}{(x+1)^5}, & x > 1 \\ \\ \frac{6(3-x)}{(x+1)^5}, & x < 1 \end{cases}$$

$f''(x) \geq 0$ za $x \in (1, 3]$.

$f''(x) < 0$ za $x \in (-\infty, -1) \cap (-1, 1) \cap (3, +\infty)$.

Prevojne tačke su tačke $(1, 0)$ i $(3, \frac{1}{32})$.