Matematika 1 - Drugi kolokvijum, 31.01.2004.
Rešenja zadataka

1. [4] **Funkciju** $f(x) = \dfrac{x}{2}(e^x + e^{2x})$ **aproksimirati Tejlorovim polinomom drugog stepena:**
a) u okolini tačke $a = 0$
b) u okolini tačke $a = -1$.

Tejlorov polinom drugog stepena $(T_2(x))$ funkcije f, u okolini tačke a, glasi
$T_2(x) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2$.
U našem slučaju je $f^{'}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{2x}) + \frac{x}{2}(e^x + 2e^{2x})$, $\quad f^{''}(x) = (e^x + 2e^{2x}) + \frac{x}{2}(e^x + 4e^{2x})$.
Prema tome:
a) $T_2(x) = x + \frac{3}{2}x^2$.
b) $T_2(x) = -\frac{1}{2}(e^{-1} + e^{-2}) - \frac{1}{2}e^{-2}(x+1) + \frac{1}{4}e^{-1}(x+1)^2 \;=\; -\frac{e+4}{4e^2} + \frac{e-1}{2e^2}x + \frac{1}{4e}x^2$.

2. [5] **Izračunati integral** $\displaystyle\int \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin 2x}dx$**.**

$$I = \int \frac{1-\sin 2x}{\sin 2x}dx = \int \frac{dx}{\sin 2x} - \int dx = \int \frac{dx}{2\sin x \cos x} - \int dx.$$
Pošto je integral $\int \frac{dx}{2\sin x\cos x}$ oblika $\int R(\sin x, \cos x)$ možemo ga rešavati smenom $tg\frac{x}{2} = t$.
Medjutim, zbog parnosti funkcije R, tj.$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, jednostavnije je koristiti smenu $tgx = t$.
$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} - \int dx \;=\; \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} - \int dx \;=\; \frac{1}{2}ln|t| - x + C = \frac{1}{2}ln|tgx| - x + C.$$

3. [5] **Izračunati integral** $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$.

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx \;=\; uv - \int vdu \;=\; \begin{bmatrix} u = \arcsin x & dv = \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = 2\sqrt{1+x} \end{bmatrix}$$
$$= 2\arcsin x \cdot \sqrt{1+x} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$
$$= 2\arcsin x\cdot\sqrt{1+x} + 4\sqrt{1-x} + C.$$

4. [7] **Izračunati integral** $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 4)}$

Smenom $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$ dobijamo $\displaystyle\int \frac{6t^5dt}{t^6(t^3+3t^2-4)} = 6\int\frac{dt}{t(t-1)(t+2)^2}$.
$\dfrac{1}{t(t-1)(t+2)^2} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t-1} + \dfrac{C}{t+2} + \dfrac{D}{(t+2)^2}$, odakle sledi
$1 = A(t-1)(t+2)^2 + Bt(t+2)^2 + Ct(t-1)(t+2) + Dt(t-1)$, odnosno
$t^3(A+B+C) + t^2(3A+4B+C+D) + t(4B-2C-D) - 4A = 1$.
Da bi ovo bio identitet mora biti $A+B+C = 0$, $3A+4B+C+D = 0$, $4B-2C-D = 0$, $-4A = 1$,
odakle je $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{9}$, $C = \frac{5}{36}$, $D = \frac{1}{6}$.
Znači,
$$6\int\frac{dt}{t(t-1)(t+2)^2} = 6\left(-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t} + \frac{1}{9}\int\frac{dt}{t-1} + \frac{5}{36}\int\frac{dt}{t+2} + \frac{1}{6}\int\frac{dt}{(t+2)^2}\right) = -\frac{3}{2}ln|t| + \frac{2}{3}ln|t-1| + \frac{5}{6}ln|t+2| - \frac{1}{t+2} + C$$
$$= -\frac{3}{2}ln|\sqrt[6]{x}| + \frac{2}{3}ln|\sqrt[6]{x}-1| + \frac{5}{6}ln|\sqrt[6]{x}+2| - \frac{1}{\sqrt[6]{x}+2} + C$$

5. [4] **Izračunati površinu figure ograničene krivama** $y = \sin x$, $y = \cos x$ **i odsečkom** $[0, \frac{\pi}{2}]$ **x-ose.**

$P = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \sqrt{2}.$

6. [5] **Izračunati integral** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx.$

$I = \lim\limits_{B \Rightarrow +\infty} \displaystyle\int_0^B \frac{arctgx}{1+x^2} dx.$

Dalje je $\displaystyle\int_0^B \frac{arctgx}{1+x^2} dx = \int_0^B arctgx \cdot d(arctgx) = arctg^2 x\Big|_0^B - \int_0^B \frac{arctgx}{1+x^2} dx$

Dakle $2\displaystyle\int_0^B \frac{arctgx}{1+x^2} dx = arctg^2 x\Big|_0^B = arctg^2 B$ odnosno $I = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{B \to +\infty} arctg^2 B = \dfrac{\pi^2}{8}.$

7. [6] **Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine** $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0, \qquad x \neq 0,\ y > 0.$

Data jednačina se može napisati u obliku $y' - \frac{4}{x} y = x\sqrt{y}$, pa je jasno da je to Bernulijeva diferencijalna jednačina. Smenom $z = \sqrt{y}$, $y = z^2$, $y' = 2zz'$ svodi se na linearnu diferencijalnu jednačinu po z:

$$2zz' - \frac{4}{x} z^2 = xz \quad \text{tj.} \quad z' - \frac{2}{x} z = \frac{x}{2},$$

čije je opšte rešenje $z(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx}(C + \int \frac{x}{2} e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx) = x^2(C + \frac{1}{2} ln|x|).$

Konačno, $y = x^4(C + \frac{1}{2} ln|x|)^2.$

8. [7] **Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''' + y'' = x^2 + 1.$

Odgovarajuća homogena diferencijalna jednačina je $y''' + y'' = 0$ a njena karakteristična jednačina je $r^3 + r^2 = 0$. Koreni karakteristične jednačine su $r_1 = r_2 = 0,\ r_3 = -1$. Opšte rešenje homogene jednačine je $y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$.

Opšte rešenje date diferencijalne jednačine će biti $y = y_h + y_p$ gde je y_p partikularno rešenje nehomogene jednačine.

S obzirom da je na desnoj strani znaka jednakosti date diferencijalne jednačine funkcija $(x^2+1)e^{0x}$ i da je 0 koren reda dva karakteristične jednačine, to y_p možemo tražiti u obliku $y_p = x^2(Ax^2 + Bx + C)$ $(y_p' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx,\ y_p'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,\ y_p'' = 24Ax + 6B.)$

Zamenom y_p, y_p', y_p'', y_p''' u datu diferencijalnu jednačinu dobija se $12Ax^2 + (24A + 6B)x + 6B + 2C = x^2 + 1$, odakle se izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene od x dobija $A = \frac{1}{12}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{3}{2}$.

Znači $y_p = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ dok je opšte rešenje date diferencijalne jednačine
$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2.$

9. *(za grupu IR1M1)* [7] **Odrediti oblast konvergencije stepenog reda** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{n-1}}{n\sqrt{3^{n-1}}}$**.**

$R = \lim\limits_{n \to +\infty} |\dfrac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{2^{n-1}}{n\sqrt{3^{n-1}}}}{\frac{2^n}{(n+1)\sqrt{3^n}}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(n+1)}{n} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, pa je interval konvergencije $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Za $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dobija se red $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ koji divergira.

Za $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dobija se red $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ koji, na osnovu Lajbnicovog kriterijuma, konvergira.

Dakle, oblast konvergencije datog stepenog reda je $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

9. *(za grupu OO1M1)* **[7] Odrediti parametar $a \in R$ tako da funkcija $y = e^{ax}$ bude partikularno rešenje diferencijalne jednačine $(1+x)y'' + xy' - y = 0,\ 1+x > 0,$ a zatim naći njeno opše rešenje.**

Zamenom $y_p = e^{ax}, y_p' = ae^{ax}, y_p'' = a^2e^{ax}$ u datu diferencijalnu jednačinu dobija se $(a^2+a)x + a^2 - 1 = 0$, odakle se izjednačavanjem koeficijentata uz iste stepene od x dobija $a^2 + a = 0$ i $a^2 - 1 = 0$ tj. $a = -1$. Dakle, $y_{p_1} = e^{-x}$ je jedno partikularno rešenje date jednačine. Drugo partikularno rešenje, linearno nezavisno od y_{p_1} može se dobiti primenom Liuvilove formule:

$$y_{p_2} = e^{-x}\int \frac{1}{e^{-2x}} e^{-\int \frac{x}{1+x}dx} dx = e^{-x}\int e^{2x} e^{ln|x+1|-x} dx = e^{-x}\int e^{2x}(x+1)e^{-x} dx = e^{-x}\int e^{x}(x+1) dx = e^{-x}\cdot xe^{x} = x.$$

Opšte rešenje date diferencijalne jednačine je $y = C_1e^{-x} + C_2x$.