Napomena: U materijalu koji sledi date su samo definicije, iskazi teorema i algoritama a *izostavljeni su dokazi teorema i primeri* **koji su radjeni na časovima predavanja.**

(Literatura:
D.Cvetković, I. Lacković, M. Merkle, Z. Radosavljević, S. Simić, P. Vasić: "Matematika I - Algebra")

Booleova algebra

Definicija 1. Neprazan skup B na kome su definisane dve binarne operacije $\vee$ ("kap", "ili") i $\wedge$ ("kep, "i") i jedna unarna operacija $\neg$ ($^{-}$) sa sledećim osobinama:

B1. *Komutativnost:* $(\forall a, b \in B)\ \ a \wedge b = b \wedge a, \qquad a \vee b = b \vee a$;

B2. *Asocijativnost:* $(\forall a, b, c \in B)\ \ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, \qquad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$;

B3. *Distributivnost:* $(\forall a, b, c \in B)\ \ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \qquad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;

B4. *Postojanje neutralnih elemenata:* $(\exists 0 \in B)(\forall x \in B)\, x \vee 0 = x, \qquad (\exists 1 \in B)(\forall x \in B)\, x \wedge 1 = x$;

B5. *Postojanje komplementa:* $(\forall x \in B)(\exists \overline{x} \in B)\ x \wedge \overline{x} = 0, \quad x \vee \overline{x} = 1$.

naziva se Bulova algebra.

Ovako definisana algebra označava se $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee)$, ili $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ^{-})$.

Primeri Bulove algebre:

1. Binarna (dvočlana) Bulova algebra (...)

2. Algebra skupova (...)

Teorema 1. *(Stone-ova teorema)*

Za svaku konačnu Bulovu algebru $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee)$ postoji skup I takav da postoji bijekcija $f : B \to \mathcal{P}(I)$ sa osobinom $(\forall x, y \in B)\ f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$,

$$f(x \vee y) = f(x) \cup f(y).$$

Napomena: Stone-ova teorema tvrdi da je svaka konačna Bulova algebra $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee)$ izomorfna nekoj algebri skupova $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap)$.
Bijekcija f naziva se *izomorfizam* algebere $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee)$ sa algebrom $(\mathcal{P}(I), \cap, \cup)$.

Posledice:
1) Bulovu algebru moguće je konstruisati samo na skupu B koji ima 2^m $(m \in N)$ elemenata.
2) Rezultat Stone-ove teoreme daje mogućnost da se u dokazivanju rezultata Bulove algebre mogu koristiti metodi koji se primenjuju u teoriji skupova.

Primer/zadatak Konstruisati četvoročlanu (četvoroelementnu) Bulovu algebru.

Teoreme u Bulovoj algebri

Za svako $a, b \in B$ važi:

T1. 1) $a \vee a = a$ 2) $a \wedge a = a$

T2. 1) $a \vee 1 = 1$ 2) $a \wedge 0 = 0$

T3. 1) $a \vee (a \wedge b) = a$ 2) $a \wedge (a \vee b) = a$

T4. 1) $\bar{0} = 1$ 2) $\bar{1} = 0$

T5. $\overline{(\overline{a})} = a$

T6. Elementi 0 i 1 su jedinstveni.

T7. Svaki element a ima jedinstveni komplement $\bar{a}$.

T8. DeMorganovi zakoni: 1) $\overline{(a \wedge b)} = \overline{a} \vee \overline{b}$; 2) $\overline{(a \vee b)} = \overline{a} \wedge \overline{b}$;

Princip dualnosti Ako je neka jednakost teorema Bulove algebre, tada zamenom $\wedge$ sa $\vee$, $\vee$ sa $\wedge$, 0 sa 1, 1 sa 0 u toj jednakosti (teoremi) dobijamo jednakost koja je takodje teorema u Bulovoj algebri.

Algebre $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee)$ i $\overline{\mathcal{B}} = (B, \vee, \wedge)$ su *uzajamno dualne Bulove algebre.*

Binarna Bulova algebra $\mathcal{B} = (\{0,1\}, \wedge, \vee, ^{-})$

Bulovi izrazi u binarnoj Bulovoj algebri

Definicija 1. U skupu $\{0, 1\}$ definišemo izraz $x^a = \begin{cases} \overline{x}, & a = 0 \\ x, & a = 1 \end{cases}$.

Teorema 1 Za $x \in \{0, 1\}$ važi $x^a = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ 1, & x = a \end{cases}$.

Dokaz: direktnom proverom.

Dakle, iz gornje teoreme sledi: $0^0 = 1, 1^1 = 1,\ 0^1 = 0,\ 1^0 = 0$

Definicija 2. *Bulovi izrazi* su:

1) 0 i 1 (zovemo ih Bulove konstante);

$x, y, z, ...$ (zovemo ih Bulove promenljive);

2) Ako su A i B Bulovi izrazi, onda su i $A \vee B$, $A \wedge B$, $\overline{A}$ Bulovi izrazi.

3) Bulovi izrazi se mogu dobiti konačnim brojem primena tačaka 1) i 2).

Sledeća definicija uvodi neke Bulove izraze od posebnog značaja.

Definicija 3.

1) *Elementarna konjunkcija* (EK) promenljivih $x_1, x_2, ...x_n$ je Bulov izraz (tj. konjunkcija) oblika $x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \wedge x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \wedge ... \wedge x_{i_m}^{\alpha_{i_m}}$, $\{i_1, i_2, ...i_m\} \subset \{1, 2, ...n\}$, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ...\alpha_{i_m} \in \{0, 1\}$.

2) *Kanonička elementarna konjunkcija* (KEK) promenljivih $x_1, x_2, ...x_n$ je Bulov izraz (tj. konjunkcija) oblika $x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_n}$, $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \in \{0, 1\}$.

3) *Disjunktivna forma* (DF) je Bulov izraz oblika $EK_1 \vee EK_2 \vee ... \vee EK_m$, gde su EK_i elementarne konjunkcije.

4) *Savršena disjunktivna normalna forma* (SDNF) u odnosu na promenljive $x_1, x_2, ...x_n$ je Bulov izraz $KEK_1 \vee KEK_2 \vee ... \vee KEK_m$, gde su KEK_i kanoničke elementarne konjunkcije.

Domaći zadatak: Definisati sledeće Bulove izraze:
Elementarna disjunkcija (ED), *Kanonička elementarna disjunkcija (KED)*, *Konjunktivna forma* (KF) i *Savršena konjunktivna normalna forma* (SKNF) u odnosu na promenljive $x_1, x_2, ...x_n$.

Bulove funkcije

Definicija 4. Preslikavanje $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ zove se Bulova funkcija.

Bulove funkcije zadaju se najčešće Bulovim izrazom ili pomoću tablica.

Teorema 2. Broj različitih Bulovih funkcija $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ od n argumenata (promenljivih) je 2^{2^n}.

(Dokaz...)

Zadatak 1. Navesti (preko tablice) sve Bulove funkcije od 1 i 2 argumenta.

Teorema 3. Svaka Bulova funkcija zadata pomoću Bulovog izraza može se izraziti pomoću tablice.

Da li se svaka Bulova funkcija koja je data pomoću tablice može napisati pomoću Bulovog izraza?

Teorema 4. Za svaku Bulovu funkciju, izuzev funkcije koja je identički jednaka 0, važi

$$f(x_1, x_2, ...x_n) = \bigvee_{(\alpha_1,...\alpha_n)\in\{0,1\}^n} [\, f(\alpha_1, ...\alpha_n) \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge ...x_n^{\alpha_n} \,].$$

(Dokaz...)

Teorema 5. Za svaku Bulovu funkciju, izuzev funkcije koja je identički jednaka 1, važi

$$f(x_1, x_2, ...x_n) = \bigwedge_{(\alpha_1,...\alpha_n)\in\{0,1\}^n} [\, f(\alpha_1, ...\alpha_n) \vee x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee ...x_n^{\overline{\alpha_n}} \,].$$

Zadatak 2. Konstruisati električno kolo koje sadrži jednu sijalicu i tri nezavisna prekidača tako da ako jedan prekidač promeni stanje, onda i sijalica promeni stanje.

Baze skupa Bulovih funkcija

Iz Teoreme 4. i Teoreme 5. proizilazi da se svaka Bulova funkcija $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ može izraziti pomoću funkcija $\wedge, \vee, ^-$. Zato se za skup funkcija $\{\wedge, \vee, ^-\}$ kaže da je *generatorski* za skup svih Bulovih funkcija.

Definicija 5. Skup Bulovih funkcija $\mathcal{F}$ je *generatorski skup* skupa Bulovih funkcija ako se pomoću funkcija iz $\mathcal{F}$ mogu izraziti sve Bulove funkcije.

Definicija 6. Skup Bulovih funkcija $\mathcal{U}$ je *baza skupa Bulovih funkcija* ako je:

1) $\mathcal{U}$ generatorski skup skupa Bulovih funkcija;

2) nijedan pravi podskup skupa $\mathcal{U}$ nema osobinu 1) tj. ne može biti generatorski skup skupa Bulovih funkcija.

$\boxed{\text{Neke interpretacije binarne Bulove algebre}}$

1) Prekidačka algebra.

2) Iskazna algebra $(\ \{0,1\},\ \{\wedge, \vee, ^{-}, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar\}\ )$

Definicija FORMULE ISKAZNE ALGEBRE

1) iskazna slova $p, q, r, \ldots$ su iskazne formule

2) ako su A i B iskazne formule tada su i $\overline{A}$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $(A \veebar B)$ iskazne formule.

3) iskazne formule mogu se dobiti samo pomoću konačno mnogo primena pravila 1) i 2).

Primeri nekih tautologija:

$p \vee q \ \Leftrightarrow\ q \vee p$	zakon komutativnosti za disjunkciju
$p \vee p \ \Leftrightarrow\ p$	zakon idempotencije za disjunkciju
$p \vee \neg p$	zakon isključenja treceg
$\neg(p \wedge \neg p)$	zakon neprotivrečnosti
$\neg\neg p \ \Leftrightarrow\ p$	zakon dvojne negacije
$(p \Rightarrow q) \ \Rightarrow\ (\neg q \Rightarrow \neg p)$	zakon kontrapozicije
$(\neg p \Rightarrow (\neg q \vee q)) \ \Rightarrow\ p$	zakon svodjenja na apsurd
$\neg(p \vee q) \ \Leftrightarrow\ (\neg p \wedge \neg q)$	de Morganov zakon
$\neg(p \wedge q) \ \Leftrightarrow\ (\neg p \vee \neg q)$	de Morganov zakon