

Napomena: U materijalu koji sledi date su samo definicije, iskazi teorema i algoritama a izostavljeni su primeri i dokazi teorema koji su radjeni na časovima predavanja.

(Literatura: M. Merkle: "Matematička analiza: teorija i hiljadu zadataka")

Linearne dif. j-ne višeg reda

Definicija 1 Dif. j-na oblika $y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = F(x)$ jeste linearna dif. j-na n-tog reda.

Podrazumevamo: $f_i(x)$ i $F(x)$ def. i neprekidne na posmatranom intervalu I.

Ako je $F(x) \equiv 0$ homogena jednačina

Ako je $F(x) \not\equiv 0$ nehomogena jednačina

Ako su $f_i(x)$ $i = 1, 2, \dots, n$ konstante jednačina je sa konstantnim koeficijentima (u protivnom sa funkcionalnim).

Linearna, homogena dif. j-na

$$\underbrace{y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y}_{\text{označimo sa } L^n(y)} = 0$$

$y = 0$ je jedno rešenje (trivijalno rešenje).

Takodje se vidi:

- ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ rešenja tada je i $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ takodje rešenje date dif. j-ne. Ovo se lako uopštava na proizvoljan broj rešenja.

Kako odrediti opšte rešenje j-ne $L^n(y) = 0$?

Definicija 2 Funkcije $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ definisane na intervalu I su *linearno zavisne na I* ako postoje konstante k_1, k_2, \dots, k_n takve da $k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2 \neq 0$ i da je $(\forall x \in I) k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \dots + k_ny_n(x) = 0$.

U protivnom su *linearno nezavisne*.

Definicija 3 Neka su $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ rešenja jednačine $L^n(y) = 0$.

$$\text{Determinanta } W(y_1, y_2, \dots, y_n; x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \text{ naziva se determinanta Vronskog}$$

(Vronskijan).

Teorema 1 Neka su $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ rešenja jednačine $L^n(y) = 0$.

Tada je ili 1) $(\forall x \in I) W(y_1, y_2, \dots, y_n; x) \neq 0$

i f-je $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ su linearno nezavisne

ili 2) $(\forall x \in I) W(y_1, y_2, \dots, y_n; x) = 0$

i f-je $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ su linearno zavisne.

Napomena: u slučaju $n = 2$, linearna nezavisnost se svodi na $\frac{y_1}{y_2} \neq Const..$

Teorema 2

Ako su $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ rešenja jednačine $L^n(y) = 0$ i ako su funkcije $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ linearno nezavisne tada je opšte rešenje date j-ne $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$ (c_i - konstante).

Linearna, homogena d.j. drugog reda: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Teorema 3 (*Liuvilova formula*)

Ako je $y_1(x)$ jedno netrivialno partikularno rešenje linearne dif. j-ne $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ tada je

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x) dx} dx$$

takodje partikularno rešenje date jednačine, linearno nezavisno od y_1 .

(Dokaz ...)

Linearna nehomogena jednačina:

$$\underbrace{y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y}_{\text{označimo sa } L^n(y)} = F(x)$$

● U slučaju $n = 2$, snižavanje reda pomoću jednog partikularnog rešenja dovodi do linearne nehomogene jednačine prvog reda.

● **Teorema 4** Neka je y_h opšte rešenje homogene j-ne $L^n(y) = 0$ i y_p jedno partikularno rešenje nehomogene j-ne $L^n(y) = F(x)$. Tada je opšte rešenje nehomogene jednačine $L^n(y) = F(x)$ dato sa

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

(Dokaz: neposredno se proverava da je $L^n(y_h + y_p) = L^n(y_h) + L^n(y_p) = 0 + F(x) = F(x)$.)

● **Metod varijacije konstanti**

Teorema 5

Neka je $y_h = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ opšte rešenje homogene j-ne $L^n(y) = 0$.

Tada je opšte rešenje nehomogene j-ne $L^n(y) = F(x)$ dato sa $\boxed{y = d_1(x)y_1(x) + \dots + d_n(x)y_n(x)}$

gde su $d_1(x), d_2(x), \dots, d_n(x)$ funkcije čiji se izvodi nalaze rešavanjem sistema jednačina

$$d'_1(x)y_1(x) + d'_2(x)y_2(x) + \dots + d'_n(x)y_n(x) = 0$$

$$d'_1(x)y'_1(x) + d'_2(x)y'_2(x) + \dots + d'_n(x)y'_n(x) = 0$$

⋮

$$d'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + d'_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + d'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) = F(x)$$

a zatim se same funkcije $d_1(x), d_2(x), \dots, d_n(x)$ nalaze integracijom.

Linearna dif. j-na sa *konstantnim* koeficijentima

● **Homogena j-na.:** $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$ (*) (p_i - konstante)

Traži se partikularno rešenje u obliku $y = e^{\lambda x}$.

Zamenom u jednačinu dobijamo: $e^{\lambda x}(\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n) = 0$

Definicija 4 Algebarska jednačina $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$ zove se *karakteristična jednačina* dif. j-ne (*).

Karakteristična jednačina ima n korena i svakom korenu odgovara po 1 partikularno rešenje, po sledećim pravilima (1) - 4) :

1) Svakom *realnom jednostrukom korenu* λ odgovara jedno partikularno rešenje: $y_p = e^{\lambda x}$.

2) Svakom *realnom korenu* λ reda $k > 1$ odgovara k partikularnih rešenja:
 $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$.

3) Svakom paru *kompleksnih jednostrukih korena* $\alpha \pm i\beta$ odgovaraju partikularna rešenja
 $e^{\alpha x} \cos \beta x$ i $e^{\alpha x} \sin \beta x$

4) Svakom paru kompleksnih korena $\alpha \pm i\beta$ reda $k > 1$ odgovara $2k$ partikularnih rešenja:
 $e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$
 $e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$

Primenom pravila 1) -4) na sve korene karakteristične jednačine, dobija se skup od ukupno n linearno nezavisnih rešenja y_1, y_2, \dots, y_n d.j. pa je opšte rešenje homogene d.j. $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$.

● Nehomogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = F(x)$$

Rešavanje nehomogene j-ne sastoji se iz dva koraka:

1. korak : Reši se homogena jednačina (tj. odredi se y_h).

2. korak :

Odredjuje se opšte rešenje nehomogene j-ne metodom varijacije konstanti (kako je opisano u teoremi 5).

Napomena: ako je *funkcija* $F(x)$ *specijalnog oblika* može se jednostavnijim postupkom poznatim kao **metod neodredjenih koeficijenata** odrediti partikularno rešenje (y_p) nehomogene j-ne, pa je tada (na osnovu teoreme 4) $y = y_h + y_p$.

Metod neodredjenih koeficijenata

Sastoji se u tome da se partikularno rešenje nehomogene j-ne pretpostavi u obliku koji je sličan obliku f-je $F(x)$, ali sa neodredjenim koeficijentima koji se odredjuju zamenom u dif. j-nu. Kada se ovako nadje partikularno rešenje y_p , onda je (prema teoremi 4) opšte rešenje $y_h + y_p$.

Ovaj metod se primenjuje *samo* u slučaju kada je funkcija $F(x)$ oblika 1. ili 2.:

1. $F(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$ ($P_m(x)$ je polinom stepena m)

Razlikujemo sledeća dva slučaja:

1.1 Ako α nije koren karakteristične jednačine, tada je $y_p = e^{\alpha x} Q_m(x)$.

1.2 Ako je α koren reda k ($k \geq 1$) karakteristične jednačine, tada je $y_p = x^k e^{\alpha x} Q_m(x)$.

Koeficijenti polinoma $Q_m(x)$ nalaze se zamenom u nehomogenu dif. j-nu, metodom neodredjenih koeficijenata.

2. $F(x) = e^{\alpha x} (P_{m_1}(x) \cos \beta x + P_{m_2}(x) \sin \beta x)$

Razlikujemo sledeća dva slučaja:

2.1 Ako $\alpha \pm i\beta$ nije koren karakteristične jednačine, tada je

$$y_p = e^{\alpha x} (Q_m(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x)$$

gde su $Q_m(x), R_m(x)$ polinomi stepena $m = \max(m_1, m_2)$.

2.2 Ako je $\alpha \pm i\beta$ koren reda k ($k \geq 1$) karakteristične jednačine, tada je

$$y_p = x^k e^{\alpha x} (Q_m(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x)$$

gde su $Q_m(x), R_m(x)$ polinomi stepena $m = \max(m_1, m_2)$.

Koeficijenti polinoma $Q_m(x), R_m(x)$ nalaze se zamenom u nehomogenu dif. j-nu, metodom neodredjenih koeficijenata.